

Dynaamisia matematiikan työvälineitä

HANNU KORHONEN, Lehtori emeritus, Orimattila

korhonen.h@gmail.com

Tietotekniikka on muuttanut käytöstämme matematiikasta ja mahdollisuksiamme matematiikan tekemiseen viimeisten viidenkymmenen, koulussa ehkä viimeisten kahdenkymmenen vuoden aikana. Uusinta uutta ovat dynaamiset mallit, ohjelmat, joihin määriteltyjä olioita voidaan muuttaa jatkuvasti määriteltyjen ominaisuuksien – sivuamisen, kohtisuoruuden tms. – säilyessä, jos piirros on tehty oikein.

Aluksi dynaamisuuden kohteena olivat vain geometrian kuviot eli synteettinen geometria. Viime aikoina olioiden dynaaminen hallinta on laajentunut myös algebraan. Kouluopetuksen kannalta tällä on suuri merkitys, sillä analyttistä geometriaa sisältyy koulukursseihin paljon myös funktioopin nimellä. Voidaan siis muuttaa funktion kuvaajaa ja nähdä, miten yhtälö muuttuu, tai päinvastoin.

Dynaamisista matematiikkaohjelmista on myös opetusvälineiksi. Sitä todistaa niillä laadittu runsas kirjo matematiikan ja fysiikan demonstraatioita atomimallista aaltoliikkeeseen ja mekaanisiin koneisiin. Säteoptiikka näyttää myös olevaan erityisen suosittua ranskalaisilla dynaamisen geometrian sivuilla.

Cabri II Plus ja Geometer's Sketchpad

Cabri www.cabri.com/v2/pages/en/index.php ja Geometer's Sketchpad www.dynamicgeometry.com ovat jo pitkään markkinoilla olleita dynaamisen geometrian työvälineitä. Edellinen on eurooppalainen, alun perin Grenoblen yliopistossa kehitystä ideoista jalostettu kaupallinen

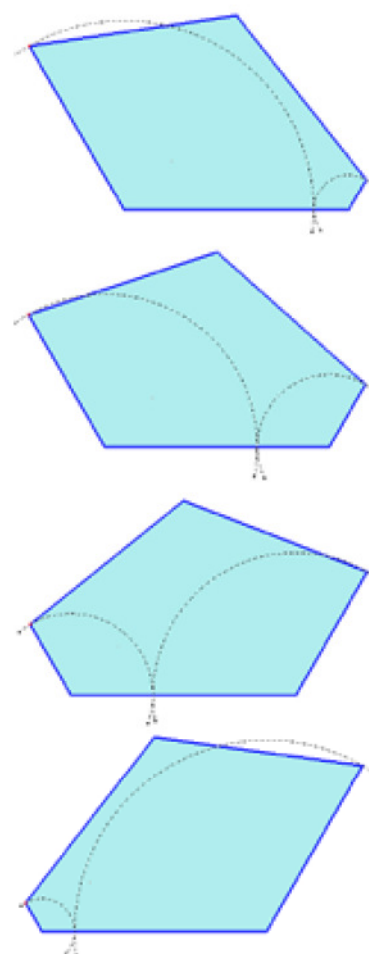
innovaatio. Jälkimmäinen on amerikkalainen Key Curriculum Press -kustannusyhtiön ohjelmankehitysosaston tuotantoa. Kumpaakin käytetään laajasti myös kansainvälisesti.

Sketchpadin saa kaupallisesti englanniksi ja espanjaksi, mutta tiettävästi se on käännetty myös ainakin venäjäksi. Cabria ei tarvitse kääntää samalla tavalla, vaan siitä käännetään vain erillinen sanastotiedosto. Tuottaja tarjoaa sitä parillakymmenellä kielellä, mutta kolmansilta osapuolilta on saatavissa muitakin sanastotiedostoja, myös suomeksi ja ruotsiksi.

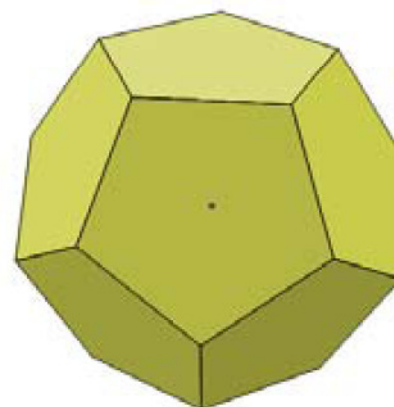
Tämä helpottaa Cabrille muilla kielillä tehtyjen työtiedostojen käyttöönottoa. Ne toimivat minikäielisessä versiossa tahansa ja tekstit voidaan kääntää samalla tavalla kuin työtiedostoa muutenkin muokataan. Kummallekin on verkossa tarjolla erittäin runsaasti kaikille kouluasteille tarkoitettua oppimateriaalia.

Peruseriaatteiltaan ohjelmat ovat hyvin samankaltaiset ja niissä on lähes täsmälleen samat toiminnot. Dynaamisten ohjelmien tärkein ominaisuus on piirrosten määrittelemisen muunneltavina objekteina. Kuvan jotain osaa, pistettä, suoraa jne. voidaan siirtää. Osien keskinäiset suhteet säilyvät, jos piirros on tehty geometrisesti oikein (Kuva 1). Samalla muuttuu dynaamisesti myös mahdollinen käyrän yhtälö. Myös numeerinen ohjaus on mahdollista.

Sketchpadin värit ja varjostukset ovat monipuolisemmat kuin Cabrin, joten kuvista on mahdollista saada näyttävämpiä (Kuva 2). Sketchpad on silläkin tavalla mo-



Kuva 1
Viisikulmion kahden sivun summa on yhtä suuri kuin kolmas sivu. Ominaisuus säilyy, vaikka kuvion muotoa muutetaan siirtämällä jotakin kärkipistettä.



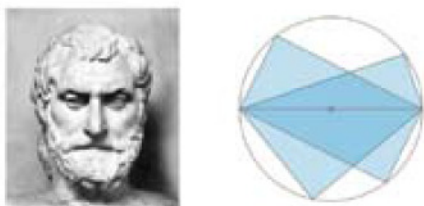
Kuva 2
Sketchpadilla piirretty dodekaedri.

nipuolisempi työväline, että sen avulla voidaan rakentaa monisivuisia dokumentteja. Kuvien käyttö antaa syvyyttä työskentelylle. Se alkaakin olla mahdollista jo kaikissa dynaamisissa matemaattikkaympäristöissä (Kuva 3).

Ilmaista ja maksullista

Verkossa on useita suppeampia tai laajempia dynaamisen matematiikan ohjelmia, esimerkiksi saksalaiset **GeoNext** <http://geonext.uni-bayreuth.de/> ja **Cinderella** <http://cinderella.de/tiki-index.php>. Jälkimmäinen on jo alun perin Java-pohjainen. Sen ansiosta Cinderellan työtiedostot on aina voitu tulostaa Java-apleteiksi, joiden käyttäminen ei vaadi itse ohjelmaa. Tämä mahdollisuus on myöhemmin lisätty eri tavoin useimpiin muihin dynaamisen matematiikan ohjelmiin. Cinderellan etuna on myös modulaarinen rakenne, joka mahdollistaa monet erityistarkoitukseen suuntautuvat laajennukset, esimerkiksi fraktaaleja, transformaatioryhmiä ja epäeuklidista geometriaa. Molemmille on tarjolla runsaasti valmiita verkkomateriaalia (Kuva 4).

Satz des Thales



Kuva 4 Geonextin dynaamisen työtiedoston aloitussivu.

Dynaamisina erikoistyövälineinä voidaan pitää myös **NonEuclidia** <http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid.html> ja **Autographia** <http://www.autograph-maths.com/>. Edellinen on ällistyttävä hyperbolisen geometrian malli Poincarén kiekolla. Jälkimmäinen taas on tavanomaiseen opetukseen suunniteltu ohjelma, joka sisältää kaksi- ja kol-

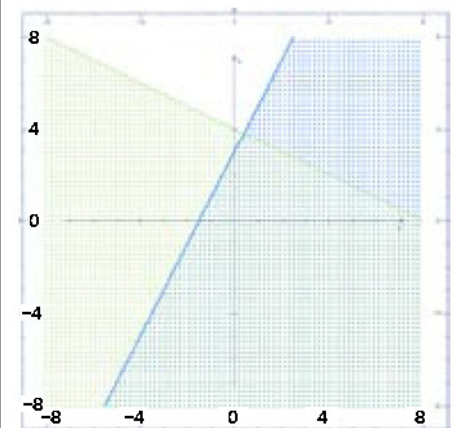


Kuva 3 Nansion silta Laitilan Kodjalassa. Cabrin mielestä siltakaari on elliptinen. (Kuva kirjoittajan.)

miulotteisen koordinaatiston sekä tilastotieteen ja todennäköisyysslas-kennan työvälineitä. Edellinen on ilmainen ja jälkimmäinen maksullinen. Toinen vastaava pari ohjelmia on **OpenEuclid** ja **Mathprof**. Dynaamisten ominaisuuksien merkitys on tunnustettu perinteistenkin työvälineohjelmien piirissä. Esimerkiksi suppeana kuvaajanpiirto-ohjelmiana pidetty **FXDraw** on pessyt kasvonsa ja sen uusimmassa versiossa on paljon dynaamisia toimintoja.

Toisenlaista ajattelutapaa edustaa **Microsoft Math**. Rakenteeltaan se on työvälinepaketti: numeerisia ja symbolisia laskuja laskeva graafinen laskin, yhtälönratkaisija, kaavakirjasto, kolmionratkaisija, yksikönmuunnostyöväline ja älytaulun eli vapaalla kädellä kirjoittamisen tuki. Laskeminen ja kuvaajien piirtäminen on integroitu. Niillä on yhteinen käyttöliittymä, joka toimii koulumatematiikasta tuttujen ajattelutapojen varassa: syötteet kirjoitetaan laskimeen.

Ohjelma piirtää siististi. Piirtoalueen ja akselijaotuksen hallitseminen tuntuu aluksi kömpelöltä, mutta tunne johtuu siitä, että ohjelmassa on mukana paljon piirtämistä auttamaan pyrkivää automaattikkaa. Akselinjaotusta ei säädellä suoraan, vaan se tehdään valitsemalla piirtoalueen rajat (Plotting Range). Kun valitaan väli $[-8, 8]$ kummallekin akselille, niin jakoväliksi tulee yksi (Kuva 5).



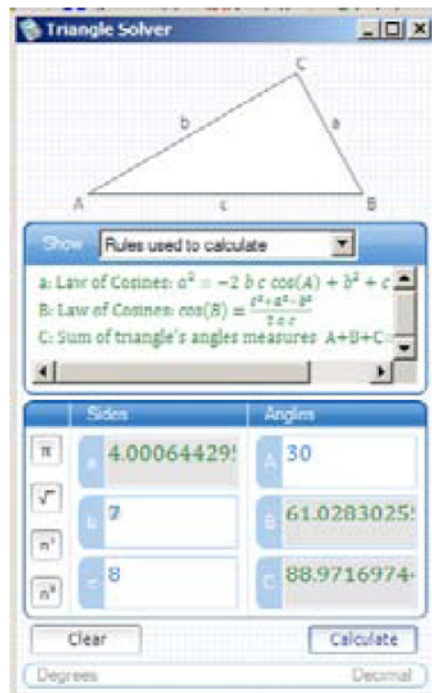
Kuva 5 Epäyhtälöryhmän graafinen ratkaisu Microsoft Math:lla.

Piirtää voi myös epäyhtälöpareja, sekä yhdisteitä että leikkauksia. Jälkimmäisessä tapauksessa ohjelma ei piirrä rajoja näkyviin. Piirtämiseen tuo ylimääräistä käsityötä se, että epäyhtälöitä muutettaessa tai konnektiivia vaihdettaessa piirtoalueen rajat eivät pysy asetuksissaan, vaan ne täytyy asettaa taas uudestaan. Se on tietysti käyttäjää auttavaa automaatiota silloin, kun kirjoitetaan kokonaan uudet ehdot, jotka vaativat uuden alueen, mutta on turhan kiusallista silloin, kun tutkitaan samaa aihetta samalla alueella pienin muutoksin.

Työväline auttaa tietysti tavanomaisissa rutiinipiirroksissa, mutta niissä kyse on vain työn määrästä. Laadullisesta muutoksesta on kyse, kun halutaan piirtää kahden muutujan funktioiden kolmiulotteisia kuvia tai napakoordinaatteina esitetyn lausekkeen kuvaajia. Piirroksen kiertämisessä akseleiden ympäri on mukana jo dynaaminen aspekti, vaikka yhtälöitä muuten täytyy muuttaa syöttökentässä ja sitten piirtää kuvaaja uudestaan. Menetelmien opettelua ohjelma tukee niin, että sekä yhtälön- että kolmionratkaisija näyttää ratkaisun vaiheet ja jälkimmäinen myös piirtää oikeamuotoisen kolmion (Kuva 6).

GeoGebra

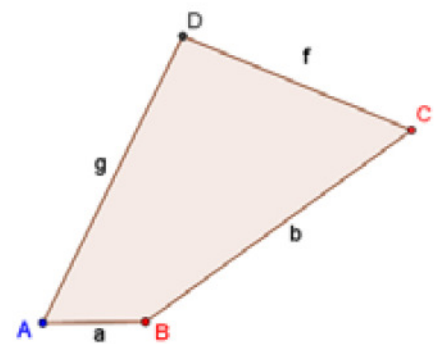
Ilmaisten ohjelmien sarjassa omaa luokkaansa on **GeoGebra** <http://www.geogebra.org/cms/>. Se on täysi-ikäinen dynamiikkaohjelma. Eikä pelkkää piirtämistä, sillä siinä on sekä analyttisen että synteettisen geometrian työkalut. Piirrettäessä ohjelma näyttää algebraikkunassa pisteiden koordinaatit ja käyrien yhtälöt. Kuviota muutettaessa yhtälö luonnollisesti muuttuu. Mutta dynaaminen ohjaus toimii myös toisinpäin: voidaan muuttaa koordinaatteja tai yhtälöitä ja kuvio muuttuu vastaavasti.



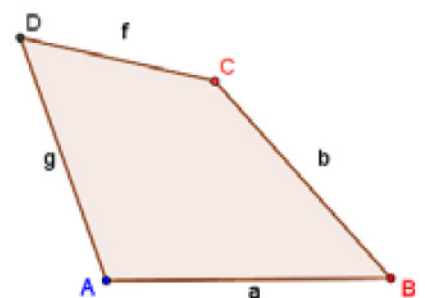
Kuva 6 Kolmiosta tunnetaan kulma ja sen viereiset sivut (sks).

Ohjelmaidea on syntynyt niin kuin oikeastaan kaikki edellä esitellyt dynaamisen geometrian ohjelmat yliopistoympäristössä. Alussa sitä kehitettiin Itävallan opetusministeriön rahalla ja nyt tukijana on Floridan Atlantic University. Ohjelman käyttäjäkunta on laajentunut nopeasti. Sille on saatavissa runsaasti materiaalia verkossa. Ja mikä yllättävintä ilmaisohjelmalle, se on käännetty yli kolmelle kymmenelle kielelle, myös suomeksi.

Ohjelman kaksisuuntaisuuden – sekä algebraa että geometriaa – niin kun nimikin jo sanoo – lisäksi sillä on kaksi muutakin etua. Ensinnäkin se on ilmainen. Toiseksi sitä voidaan käyttää verkon yli lataamatta ohjelmaa omalle koneelle. Tämä mahdollistaa esimerkiksi sen, että sitä voidaan vaivatta tarjota oppilaille kotitehtävien ja projektitöiden välineeksi. Tehtävät voivat olla kirjassa tai jollakin työalustalla, esimerkiksi Moodlessa, ja oppilaat kirjoittavat raporttinsa, GeoGebraan työtiedostot, myös sinne.



Nelikulmiolla on vakiopiiri.
Pinta-ala ABCD = 35.63



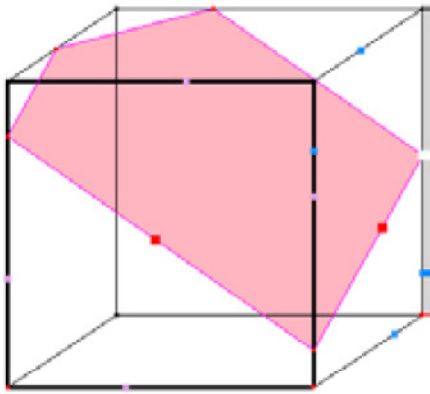
Nelikulmiolla on vakiopiiri.
Pinta-ala ABCD = 35.61

Kuva 7 Nelikulmiolla on vakiopiiri. Sen muotoa voidaan muuttaa pisteistä B ja C. Ohjelma näyttää pinta-alan.

Verkosta voi havaita, että monet suomalaisetkin koulut ovat käyttäneet GeoGebraa jo englanninkielisenä. Sen uudessa 3.0-versiossa on paljon uusia ominaisuuksia ja toimintoja, joita kaikkia ei tule ajatella leeksikaan ilman ohjekirjaa. Sekin on nyt suomennettu ja luettavissa verkossa.

3 D

Dynaamisella tasogeometrian ohjelmalla mahdollista piirtää myös kolmiulotteisten kappaleiden projektioita ja ratkaista avaruusgeometrian ongelmia, esimerkiksi pohtia kuution leikkaamista tasolla (Kuva 8). Ongelma on helppo ratkaista pöytäveitsellä juustokuution tapauksessa, mutta ei ollekaan yhtä helppo tasoon piirtäen, varsinkin jos tasosta annetaan pisteitä, jotka ovat kuution sivutahkoilla eikä särmillä.

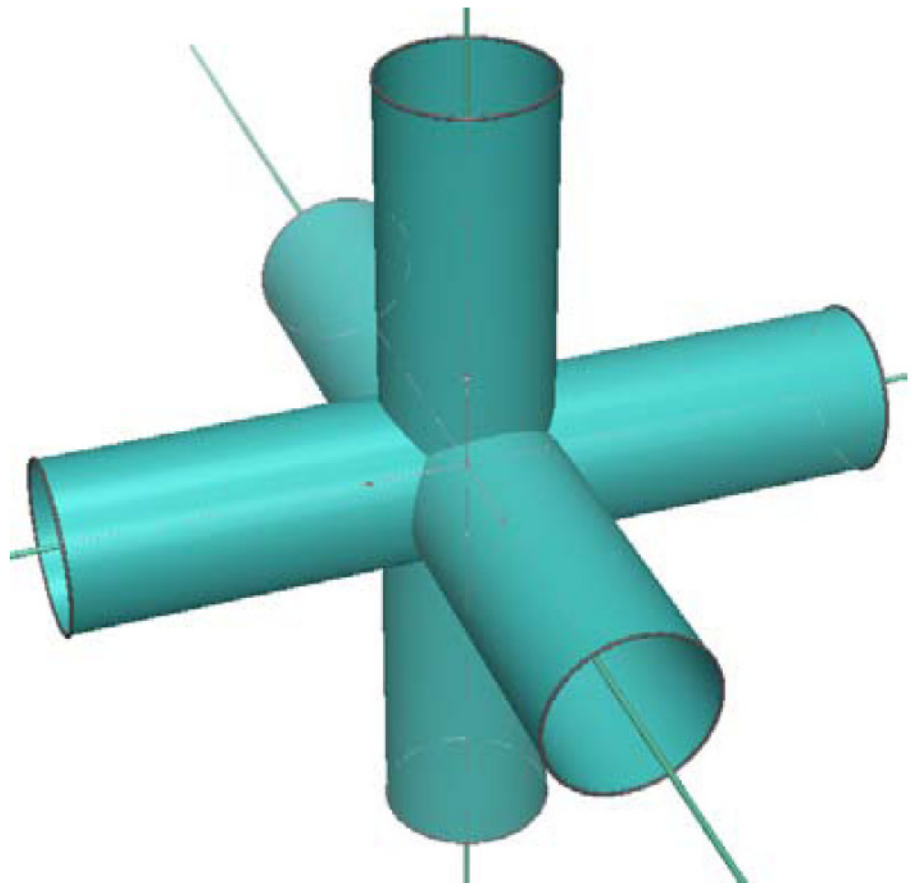


Kuva 8 Kruunun leikkaaminen tasolla.

Tähän tuovat olennaista helpotusta vasta ohjelmat, joissa on valmiina kolmiulotteisen mallintamisen työvälineet. Näitä on pitkään ollut teknisen suunnittelun apuvälineissä, ns. CAD-ohjelmissa, mutta halpoja ja helppokäyttöisiä, koulukäyttöön soveltuvia ei ole paljon. Yksi niistä on **Cabri 3D** www.cabri.com/v2/pages/en/products_cabri3d.php. Dynaamisuudessaan se on jopa CAD-ohjelmia kätevämpi kolmiulotteisten kappaleiden tarkastelussa. Kappaleiden mieltäminen tapahtuu samalla tavalla kuin kolmessa ulottuvuudessa muutenkin.

Esimerkiksi millainen kappale on ympyrälieriö, mitä tarvitaan sen määrittämiseksi: yksi suora (akseli) ja yksi piste sen ulkopuolelta. Sekin lukion avaruusgeometrian kurssin vaikeasti piirrettävä mieliharmi, jonka havainnollistamiseen tarvitaan tavallisesti peruna ja omenapora – kolmen kohtisuoran lieriön leikkaus – onnistuu ongelmitta (kuva 9) ja kääntyilee avaruudessa lieriön akselista kääntämällä.

Cabri 3D on jo vakiintunut ohjelma. Nykyisessä versiossa 2 on sellaisia lisäominaisuuksia, jotka tukevat opetusta ja oppimista: piirroksen vaiheiden selaus, numeerinen mittaaminen samaan tapaan kuin dynaamisissa tasogeometri-



Kuva 9 Kolme toisiaan kohtisuorasti leikkaavaa lieriötä.

an ohjelmissa, datan siirtäminen suoraan laskettavaksi, käyrien yhtälöiden näyttäminen jne. Ohjelmalle on tänä vuonna myönnetty englantilainen BETT-palkinto ansiostaan luovana ja innovatiivisena oppimisvälineenä.

Apua opetukseen?

Dynaamisen geometrian työvälineet ovat käteviä ja käyttökelpoisia matematiikan havainnollistamisen ja tutkimisen apuvälineitä. Ne eivät kuitenkaan ole yleistyneet tavanomaisessa luokkatyöskentelyssä muutamia innostuneita opettajia lukuun ottamatta. Usein niitä nimitetään väheksyvästi pelkiksi piirtämishjelmiä, vaikka ne tarjoaisivat pedagogisesti kunnianhimoisia mahdollisuuksia matematiikanopetuksen ja –oppimisen parantamiseen. Aina ne eivät kuitenkaan istu laskemiskeskiseen tehtä-

väpedagogiikkaan, vaan muuttavat myös oppimista.

Yhtäältä niiden käyttö pakottaa panostamaan opiskelijan itsensä tekemään työhön, tutkivaan oppimiseen. Toisaalta ohjelmat ovat oppijalle siitä kiusallisia, että asiat on määriteltävä kunnolla. Mikään sinnepäin vapaalla kädellä huitais-tu sähellys ei riitä tuloksen aikaansaamiseen. Kolmanneksi tuloksia saa aikaan käsin piirtämistä olennaisesti vähemmällä työllä. Lisäksi huonommankin piirtäjän tuotokset ovat näyttäviä ja viivat suorita tai säännöllisesti käyriä ilman monia pyyhkimisiä. Ja vielä: teknologia tarjoaa mahdollisuuksia. Itse teknologian mahdollisuuksien tunteminenkin on tärkeä tavoite. Miksi emme niitä käyttäisi koulusakin, kun yhä useammat joutuvat niitä kuitenkin kohtaamaan työelämässä ■