Mielikuvat ja dynaamisuuden lumo

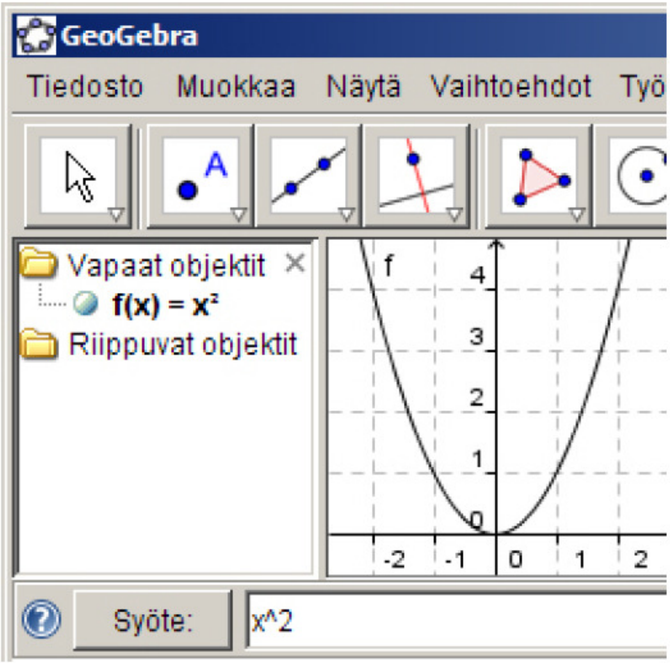
HANNU KORHONEN , lehtori emeritus, Orimattila

Uudet opetusvälineet eivät muuta vain työskentelymenetelmiä. Ne vaikuttavat myös siihen mitä opitaan. Oppimistuloksissa tiedollisen oppimisen lisäksi tärkeitä ovat tiedostamattomat mielikuvat, jotka ohjaavat opittujen asioiden käyttöä uusissa tilanteissa. Matematiikan objekteihin liittyviä mielikuvia muuttavat ehkä voimakkaimmin uudet dynaamiset tietokoneavusteiset työvälineet. Eikä tämä koske vain oppilaita, vaan opettajakin saattaa yllättyä siitä, miten staattisia hänen itse oppimaansa ja vuosikymmenet opettamansa matematiikkaan liittyvät mielikuvat saattavat olla.

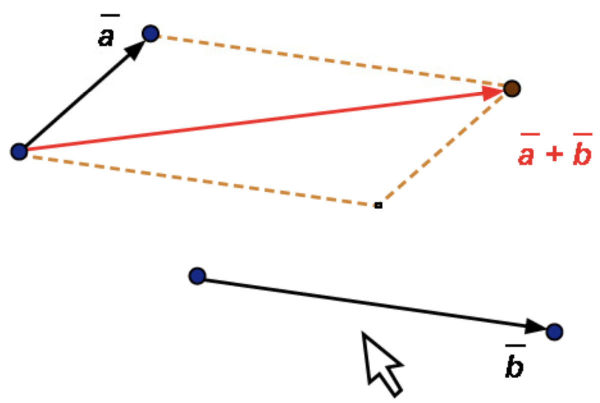
Dynaamisten ohjelmien käyttöä perustellaan usein kätevyydellä, monipuolisuudella ja havainnollisuudella. Parhaimmillaan sen tapaiset työvälineet eivät ehkä kuitenkaan ole tavanomaisessa opetuksessa, vaan siinä että ne tukevat oppijan aktiivista roolia oppilaan omaa tekemistä ja tutkivaa oppimista. Lisäksi dynaamisuus tuo oppimiseen aivan uuden ulottuvuuden. Voimakkain elämys itselleni oli se, kun paraabeli lähti liikkeelle!

GeoGebrassa funktion kuvaaja piirretään helpoimmin kirjoittamalla muuttujan lauseke näytön alareunan syöttökenttään, siis esimerkiksi x^2 (Kuva 1). Muita ohjelmia käyttäessäni olin jo tottunut siihen, että pisteitä, viivoja ja kuvioita voi siirtää dynaamisesti kuvion geometristen ominaisuuksien muuttumatta. En kuitenkaan osannut odottaa, että paraabelikin voisi olla dynaaminen. Elämys oli lähes järkyttävä, kun kuvaaja lähti liikkumaan. Asia saattaa tuntua pieneltä, mutta vieläkin voin muistaa, miten voimakas kokemus se oli. Myöhemmin olen tietysti oppinut, että GeoGebrassa dynaamisuus on kaksisuuntaista käyrän siirtäminen muuttaa sen yhtälöä ja toisaalta algebraikkunassa olevan yhtälön muuttaminen siirtää kuvaajaa.

Negatiivisia yllätyksiä tuli sen sijaan vektoreiden yhteydessä eikä suinkaan ohjelman suhteen, vaan oman osaamisen suhteen. Ehdin olla opettajana viidellä eri vuosikymmenellä, opettaa sekä matematiikkaa että fysiikka peruskoulussa ja lukiossa, vektoreita kummassakin oppiaineessa. Sitten tulin tehneeksi kollegan pyynnöstä kahden vektorin yhteenlaskua havainnollistavan GeoGebra-sivun, joka on vieläkin nähtävissä Dynamat-hankkeen esimerkeissä (http://www.dynamathanke.net → Esimerkit → Vektorien summa). Testasin tulosta siirtämällä toista yhteenlaskettavaa (Kuva 2). Vektori siirtyi, mutta summa ei muuttunut! Olin siis tehnyt jonkin virheen konstruk-



Kuva 1 Paraabelin piirtäminen.

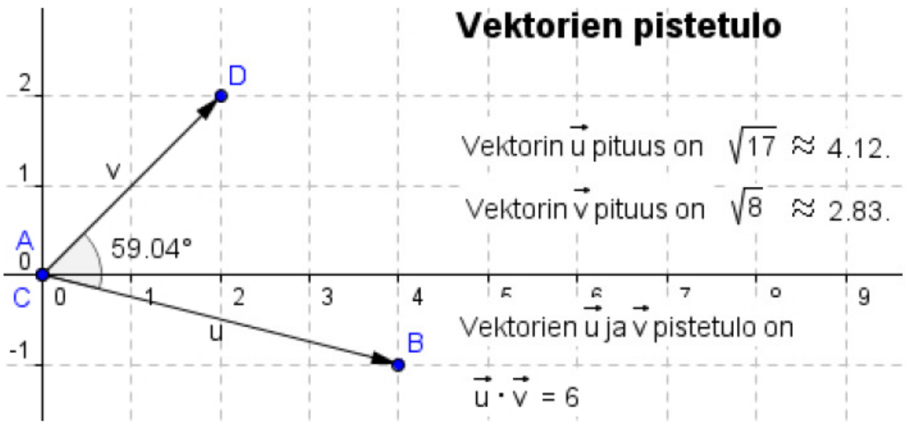


Kuva 2 Vektorien summa.

tiossani. Piirroksessa en huomannut vikaa, kunnes oivalsin. Vika ei ollutkaan siinä, vaan vektorimielikuvassani. Tiedollisella tasolla tiedän – ja tiesin silloinkin – tietenkin hyvin, että vektori ei muutu, vaikka sitä siirretään paikasta toiseen. Siksi summankaan ei pitänyt muuttua. Tämä tieto ei kuitenkaan ollut siirtynyt vuosikymmenien aikana osaksi minua, mielikuviani ja elämyksiäni. Vasta kun muutin vektoria siirtämällä loppupistettä, summakin alkoi muuttua.

Yksittäisiä ajatteluvirheitä voi tietysti tehdä kuka tahansa ja ne voi ohittaa helposti. Tähän asia olisi minunkin osaltani jäänyt, ellei varsin pian olisi tullut toista samankaltaista takaiskua. Olin asettanut pistetuloa havainnollistavan GeoGebra-sivun (http://www.dynamathanke.net → Esimerkit → Pistetulo) sellaiseen tilaan, että se käytti vain kokonaislukupisteistä. Pistetulon lukuarvohan saadaan kertomalla kolme irrationaalilukua keskenään vektorien pituudet ja niiden välisen kulman kosini. Sivun toimintaa testatessani havaitsin, että olin tehnyt jotain väärin. Ohjelma ei näyttänyt lainkaan tulon desimaaliosaa (Kuva 3). Ja kun kerrotaan kolme päättymätöntä jaksotonta desimaalilukua, niin kyllähän siellä desimaaliosa tietysti aina on. Meni useampi päivä ennen kuin oivalsin, että olihan minulla tietysti pistetulosta analyyttinenkin mielikuva, joka ilman muuta kertoo, että jos vektorin koordinaatit ovat kokonaislukuja, niin pistetulokin on kokonaisluku $u_x v_x + u_y v_y$. Nämä kaksi mielikuvaa eivät vain olleet koskaan todella yhdistyneet omassa vektorimielikuvassani.

Muutamasta kokemuksesta on tietysti uskaliasta yleistää, mutta rohkenen silti väittää, että dynaamisuus tuo käsitteiden oppi-



Kuva 3 *Vektorien pistetulo. Vektorinuolien lisäksi myös numeeriset objektit ovat dynaamisia.*

miseen laadullista uutta. En pidä itseäni tyhmänä enkä kokemattomana. Olen selviytynyt aikanaan pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksista ja yliopiston matematiikan laudatur-oppimäärästä erinomaisesti, tehnyt tuhansia ja taas tuhansia matematiikan tehtäviä (laskenut laskuja!) sekä oppilaana että opettajana, opettanut ja tarkastanut toisten tekemiä tehtäviä, samoin monet oppilaani myöhemmin. Siitä huolimatta, että tiedollisella tasolla osaan asiat, huomaan, että matemaattiset mielikuvani ovat rajoittuneita ja puutteellisia.

Mistä sitten tulee luulo, jopa usko, että asiat voisi oppia paremminkin. Varmaankin meillä on huippukykyjä, joiden mielikuvituksessa matematiikkaa ja matemaattiset objektit elävät. Mutta miten asiat voidaan opettaa meille tavallisille ihmisille. Tässä pätee ehkä se sama totuus kuin matematiikankin suhteen ei ole mitään kuninkaan tietä, joka veisi suoraan päämäärään ilman mitään vaivaa. Tarvitaan konkreettista materiaalia, esi- ja alkuopetuksessa nämä ovat pääasiassa. Perusopetuksen alaluokilla voidaan tietysti myös piirrellä itse, mutta matematiikan opetuksen välineenä piirtämisen painopistekohta on yläluokilla. Ainakin muutama peruskonstruktio olisi hyvä osata tehdä harpin ja viivaimen avulla. Dynaamisiin matematiikan työvälineisiin tutustutaan samassa yhteydessä, mutta niitä tarvitaan välttämättä perusopetuksen loppuvaiheessa ja erityisesti lukiossa ja vastaavalla ammatillisella tasolla.

Dynaamisuus on uusi piirre. Se muuttaa oppimista laadullisesti. Tämä ei kuitenkaan ole ainoa syy käyttää dynaamisia työvälineitä koulussa. Oppiaineesta on myös annettava ajanmukainen kuva. Äidinkielenopettajalle ei varmaan tulisi mieleenkään olla esittelemättä tekstinkäsittelyohjelmaa prosessikirjoittamisen yhteydessä. Samoin ajanmukaiseen kuvataiteen opetukseen kuuluvat ilman muuta alkeet sähköisestä kuvan käsittelystä. Matematiikasta jää aivan väärä ja vanhanaikainen kuva, jos se esitellään vain pään sisällä tapahtuvina prosesseina, jotka parhaimmillaan purkautuvat kynän avulla paperille. Siksi ei peruskoulusta eikä lukiosta saisi enää päästää ulos yhtään oppilasta, joka ei ole edes tutustunut dynaamisiin työvälineisiin. Laskin on tietysti sekin moderni apuväline, mutta ensisijaisesti laskentoon. Matematiikkaan tarvitaan matematiikan välineitä. ■