

GeoGebra opetuskäytössä

ERKKI LUOMA-AHO, matematiikan lehtori, Cygnaeus-lukio, Jyväskylä

Esittelen artikkelissa lyhyesti GeoGebra-ohjelmiston ja kerron kokemuksiani tämän ilmaiseksi saatavilla olevan alustavapaan ohjelman käytöstä opetustilanteissa.



Mikä on GeoGebra?

GeoGebra on opetuskäyttöön laadittu dynaamisen geometrian ja matematiikan tietokoneohjelma. Dynaamisuus merkitsee sitä, että ohjelman avulla luotuja piirroksia on mahdollista muokata tmm. seuraavilla tavoilla.

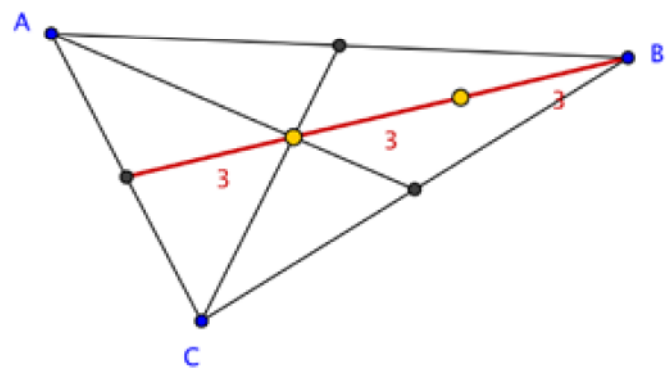
- Se on Javalla ohjelmoituna riippumaton käyttöjärjestelmästä (Linux, OSX, Windows)
- Se on ilmainen: koulun vähiä määrärahoja ei tarvitse käyttää kaupallisen ohjelmiston hankintaan
- Se on avoimen koodin ohjelma: kehitystyö jatkuu ja mm. kieliversioita on jo useita kymmeniä mukaan lukien suomen kieli.

Dynaamisen grafiikan ohjelmiston tyyppinen sovelmus on kolmion merkillisten pisteiden tutkiminen. Kun piirretään kolmio ja sille mediaanit, niin ohjelma ymmärtää objektien riippuvuussuhteet. Kun tartutaan kolmion kärkipisteeseen kiinni ja siirretään sitä, niin kaikki mediaanit mukautuvat pisteen liikkeisiin. Dynaamisesta kuviosta voidaankin havaita selvällä tavalla kuinka mediaanit leikkaavat aina, muuttipa kolmion minkälaiseksi tahansa. Tämänkaltaisten elektronisten harppi-viivain konstruktoiden lisäksi GeoGebra osaa paljon muutakin, sillä sen ydin on terävän matemaattinen. Se ei säikähdä toisen asteen käyriä, funktion kuvaajia, derivaattoja tai integraaleja. Sen avulla on yhtä helppo havainnollistaa ala- ja yläporrasfunktiot, erotusosamäärän raja-arvon ja sinifunktion argumentin kaksinkertaistamisen vaikutuksen kuvaajaan kuin

edellä mainitut kolmion merkilliset pisteet tai Pythagoraan lauseen.

Havainnollistaminen GeoGebraalla

Olen käyttänyt GeoGebraa opetuksen apuna muuta-



Kuva 1. Mediaanien leikkauspiste.

mia vuosia. Esimerkkini painottuvat lukioon, olenhan lukion opettaja, mutta olen kerännyt ideoita opetuksen elävöittämiseksi myös peruskoulussa. Kaikki tekstissä mainitut havainnollistukset on löydettävissä GeoGebra Wikistä, jonka osoite löytyy artikkelin lopusta.

GeoGebraa ja mitä tahansa muutakin havaintovälinettä käyttäessä on hyvä esittää itselleen kysymys: "Mitä haluan välittää havainnollistuksen kautta oppilaille"? Ellei tätä kysymystä käsittele saattaa käydä niin, että välineestä tulee pääasia eikä oppiminen tällöin edisty toivotusti.

Itse opetustilanteessa kannattaa pitää mielessä, että vaikka työväline on opettajalle tuttu, niin oppilaal-

le se on luultavasti vieras. Oleellisen havaitsemiseen saattaa oppilaalta kulua aikaa, jolloin liian nopeasti vaihtuvat konstruktiot voivat turhauttaa oppilasta. Oma kokemukseni onkin, että oppimisen kannalta parhaan tulokseen saavuttaa, kun valitsee harkiten yhden hyvän havainnollistuksen ja kietoo opetuskonaisuuden tämän ympärille.

Toinen oleellinen opetustilanteessa mielessä pidettävä seikka on, että oppilas ei voi itse vaikuttaa näkemäänsä. Hiiri on opettajan kädessä. Liian nopea eteneminen ilman selventävää puhetta voi tipauttaa oppilaat kärryiltä. Siksi on tärkeää varata aikaa keskustelulle ja esittää tarkentavia kysymyksiä oppilaille, jolloin he joutuvat pohtimaan näkemäänsä. Nämä perusasiat mielessä havainnollistaminen GeoGebralla on antoisaa sekä opettajalle että oppilaille!

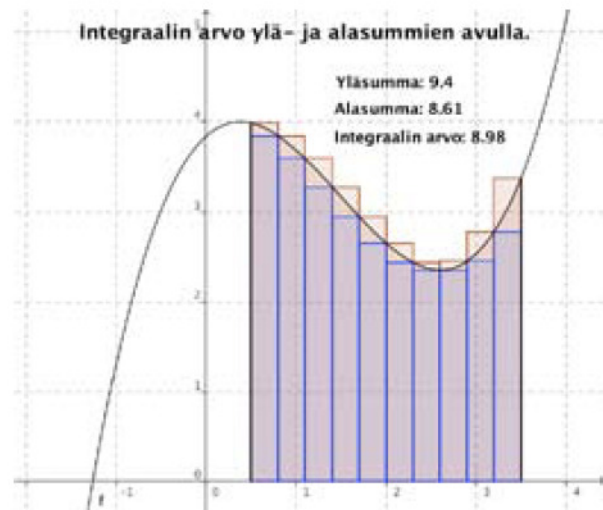
Esimerkkejä lukiosta

Lukion matematiikan aloittavilla kursseilla oppilas kohtaa monta uutta asiaa. Tästä syystä varaan GeoGebran käytön ensimmäisillä kursseilla vain siihen, että havainnollistan kuinka polynomifunktion korkeimman termin asteluku määrää kuvaajan muodon ja kuinka toisen asteen polynomifunktion kuvaaja ja funktion nollakohdat liittyvät toisiinsa.

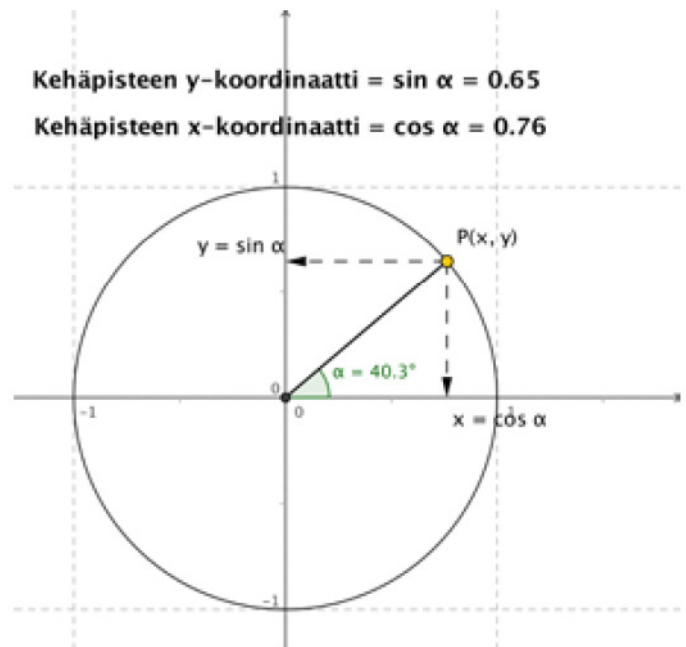
Geometrian kurssit ovat pääosin laskennallisia. Kolmion merkillisten pisteiden havainnollistamisen lisäksi en, ehkä hieman yllättäen, GeoGebraa tasogeometrian apuna juuri käytä

Analyytinen geometria on Geogebraan ominta aluetta. Käytän GeoGebraa mm. havainnollistamaan yhtälön $y = kx + b$ parametrien k ja b vaikutusta suoran kuvaajaan sekä ympyrän yhtälön $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ parametrien a , b ja r vaikutusta ympyrän kuvaajaan. Koska GeoGebra on ennen kaikkea matemaattinen ohjelma, niin mm. ympyrän yhtälön voi syöttää sille eri muodoissa ja ohjelma osaa kirjoittaa yhtälöt keskipistemuotoon. Käytänkin GeoGebraa aivan tavallisella tunnilla apuna neliöksi täydentämisen tarkistuksiin, lähinnä tietenkin itseäni varten. Piirrän ohjelmalla myös jonkin verran tehtävien mallikuvioita.

Vektorilaskennan perusmääritelmien havainnollistukset – vektorien summa ja vektorin kertominen luvulla – onnistuvat GeoGebralla kätevästi ja määritelmien keskeinen idea välittyy hyvin dynaamisen kuvion kautta. Kuitenkaan ei pidä unohtaa hyviä vihkomuistiinpanoja ja käsitteen symbolista määrittelyä. Sanallinen kuvailu, dynaaminen kuvio ja symbolinen määritelmä ovat kaikki käsitteen oppimisen kannalta tärkeitä.



Kuva 2. Riemannin summat.



Kuva 3. Sinin määrittely yksikköympyrässä.

Jaakuvuuden ja raja-arvon havainnollistaminen onnistuu GeoGebralla myös, sillä GeoGebra ymmärtää kaikkien tavallisten alkeisfunktioiden lisäksi myös paljoitain määritellyt funktiot. Erotusosamäärän raja-arvon eli sekantista tangentiksi –havainnollistukseen GeoGebra sopii myös erinomaisesti.

Integraalilaskennan kurssin upeinta sisältöä on käyrän ja x -akselin rajoittaman alueen pinta-alan laskeminen. Riemann-integraaliin oleellisesti kuuluvien ala- ja yläporrasfunktioiden yhteyttä määrättyyn integraaliin voi havainnollistaa GeoGebralla. Pitävien perustelujen esittäminen on tietenkin lukio-

tasolla vaikeaa, mutta keskeisen idean voi tavoittaa havainnollistuksen kautta.

Trigonometrinen funktioiden tutkiminen soveltuu analyttisen geometrian ohella GeoGebralta parhaiten. Sinin, kosinin ja tangentin määritelmiä sekä parametrien a ja k vaikutusta trigonometrisen funktion $f(x) = a \sin(kx)$ kuvaajaan kannattaa tarkastella GeoGebran avulla. Varsinkin fysiikkaa opiskelleet osaavat yhdistää kertoimen a amplitudiin ja mm. käsite jakson pituus on havaintojeni perusteella syventynyt dynaamisen kuvion muutoksia ihmetellessä.

Esimerkkejä peruskoulusta

Peruskoulun oppimäärässä peilaus, siirto ja kierto tasossa soveltuvat dynaamisen geometrian ohjelmiston avulla esitettäväksi, kuten yhdenmuotoisuuden havainnointi ja erilaisten tasokuvioiden pinta-alojen laskukaavat. Esimerkiksi puolisuunnikkaan pinta-alan perustelu kahtena suunnikkaana, suunnikkaan pinta-ala suorakulmiona ja kolmion pinta-ala suunnikkaan puolikkaana ovat havainnollisia dynaamisina kuvioina. Myös suorakulmaisen särmiön tilavuuden reaaliaikaisten muutosten seuraaminen särmiön pituuksien muuttuessa voi avata oppilaan ajatusmaailmaa tilavuuden käsitteestä.

Kahden suoran leikatessa toisiaan syntyy monenlaista ihmeteltävää, kuten ristikkäiset kulmat ja vieruskulmat. Kolmen suoran tilanteessa saadaan lisäksi samankohtaisia kulmia. Näihin kaikkiin tilanteisiin tutustuminen luonnistuu mainiosti GeoGebralla.

Pythagoraan lauseen varsinainen todistaminen ei taida onnistua, mutta havaintoon pohjautuva perustelu sopii hyvin myös peruskouluun. Pythagoraan lauseelle lienee olemassa yli 100 erilaista todistusta ja digitaalisia GeoGebra-versioitakin on useita. Jokin niistä saattaa soveltua oppitunneilla tutkittavaksikin.

GeoGebra oppilaiden käsissä

Olen saanut etuoikeuden olla yhdessä kollegani kanssa muutamia kertoja opettajana kurssilla nimeltä Tietokoneavusteinen matematiikka. Sisältöinä kurssilla on eri ohjelmistojen, mm. juuri GeoGebran, käyttö matematiikan tuottamiseen. Kokemukset kurssin perusteella ovat erittäin positiiviset. Lyhyen harjoittelun jälkeen – tasoerojen ollessa luonnollisesti melko suuret – oppilaat pystyvät itsenäiseen työskentelyyn. Erikoiskurssit ovatkin tärkeitä, sillä ne mahdollistavat oppilaiden oman tekemisen. Tavanomaisten kurssien oppitunneilla olen käyttänyt GeoGebraa vain opettajajohtoiseen havainnollistukseen.

Valmistautuminen havainnollistukseen

1. Mieti etukäteen mitä haluat välittää havainnollistuksen kautta.
2. Valmista muutama käsitteeseen liittyvä kysymys esitettäväksi joko johdantona havainnollistukselle, havainnollistuksen aikana tai jälkikäteen pohdittavaksi.
3. Varmista, että AV-välineistö ja ohjelma toimivat opetustilassa. Harjoittele havainnollistuksen käynnistäminen ja esittäminen etukäteen. Jos käynnistymisaika on pitkä, käynnistä GeoGebra jo ennalta.
4. Varaudu siihen, että tietokone ei käynnistyäkään tai kaatuu tai jostain muusta ennalta arvaamattomasta syystä et voikaan käyttää tietokonetta.

Miten tästä eteenpäin?

Heräsikö kiinnostus tutustua tarkemmin GeoGebraan? Hienoa! Ensiksi tarvitset ohjelman. GeoGebran voit käynnistää joko suoraan verkosta tai asentaa perinteiseen tapaan koneellesi, seuraa sivulta <http://www.geogebra.org/> löytyviä ohjeita. Toimiakseen GeoGebra tarvitse koneelle asennettuna Javan. Etsi tähänkin ohjeet verkosta. Kun ohjelma on käynnissä niin seuraava askel on opetella käyttämään sitä. Englannin kieltä taitaville verkosta löytyy paljon hyviä ohjeita ja vinkkejä, mutta nykyisin jonkin verran suomeksikin. Aivan aluksi omat taidot eivät tietenkään riitä kovin pitkälle, jolloin helpointa on turvautua valmiiseen materiaaliin. Wikipedian yhteisöllisellä periaatteella toimiva GeoGebraWiki (<http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Finnish>) tarjoaa paikan, josta voit etsiä valmista suomenkielistä materiaalia. Kaikki sieltä löytyvät havainnollistukset ovat vapaasti jokaisen käytettävissä. Ei-kaupallisena ohjelmiana GeoGebra on itsessään vain työskentelyalusta, johon opettajien on itse tuotettava sisältö. Tätä artikkelia silmällä pitäen olenkin lisännyt GeoGebraWikiin esimerkit kaikista mainitsemistani havainnollistuksista. GeoGebraWiki on siten hyvä paikka aloittaa tutustuminen GeoGebran mahdollisuuksiin. ■